Analysis

Steckbriefaufgaben

Methodenliste

Dieses Wissen erzeugt Routine

Datei Nr. 42070

Stand: 27. März 2017

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.schule

Vorwort

Steckbriefaufgaben sind sozusagen die Umkehrung der Kurvendiskussion. Bei einer Kurvendiskussion ist eine Funktion gegeben und man bestimmt aus der Funktionsgleichung die geometrischen Eigenschaften des Funktionsgraphen. Bei einer Steckbriefaufgabe sind geometrische Eigenschaften einer Kurve gegeben. Gesucht ist eine Funktion, deren Graph genau diese Eigenschaften aufweist. Dabei ergeben sich kleine methodische Unterschiede, die ich kurz zeigen will:

Bestimmung eines Extrempunktes:

Wenn gilt: $f'(a)=0$ und $f''(a)<0$, dann ist $H(a\,|\,f(a))$ ein Hochpunkt des Graphen.
Wenn gilt: $f'(a)=0$ und $f''(a)>0$, dann ist $T(a\,|\,f(a))$ ein Tiefpunkt des Graphen.

Umkehrung:

Wenn $H(a\,|\,f(a))$ ein Hochpunkt des Graphen ist, dann ist $f'(a)=0$.
Wenn $T(a\,|\,f(a))$ ein Tiefpunkt des Graphen ist, dann ist $f'(a)=0$.

Man sieht also, dass die Kontrolle mit f'' bei der Umkehrung keine Rolle spielt. Man erhält einen Hoch- oder Tiefpunkt und darf voraussetzen, dass dieser eine waagrechte Tangente hat. Das besagt dann $f'(a)=0$. (Randhochpunkte und Spitzen-Hochpunkte kommen in Steckbriefaufgaben normalerweise nicht vor.)

Bestimmung eines Wendepunktes:

Wenn gilt: $f''(a)=0$ und $f'''(a)\neq 0$, dann ist $W(a\,|\,f(a))$ ein Wendepunkt des Graphen.

Umkehrung:

Wenn $W(a\,|\,f(a))$ ein Wendepunkt des Graphen ist, dann ist $f''(a)=0$.
Die Untersuchung mit f''' entfällt, weil ja sicher ein Wendepunkt vorliegt.
($f'''(a)\neq 0$ garantiert ja, dass f'' an der Wendestelle auch wirklich einen Krümmungswechsel beschreibt.)

Steckbriefaufgaben sind also einfacher in diesen Aussagen. Doch es gibt eine ganze Menge von geometrischen Eigenschaften, die man in Aussagen über die gesuchte Funktion f umwandeln muss. Die am häufigsten vorkommenden habe ich in der folgenden Tabelle zusammengestellt.
Doch auf dem ersten Blatt lasse ich die Folgerungen noch leer – es ist ein Aufgabenblatt zum Ausfüllen.
Noch ein Wort zu den verwendeten Funktionen. Meistens haben sie Grad 2, 3 oder 4. Und dann macht man z. B. diese Ansätze:

	allgemein	bei Symmetrie	
Grad 2:	$f(x)=ax^2+bx+c$	$f(x)=ax^2+b$	(Symm. zur y-Achse)
Grad 3:	$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$	$f(x)=ax^3+bx$	(Symm. zum Ursprung)
Grad 4:	$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$	$f(x)=ax^4+bx^2+c$	(Symm. zur y-Achse)

Liste zum selbst ausfüllen	
Aus dieser Kurveneigenschaft	**folgt diese Funktionseigenschaft für f:**
Die Kurve K geht durch den Punkt $P(-1\,|\,2)$	
K schneidet die x-Achse an der Stelle 7.	
K hat an der Stelle 2 die Steigung 3.	
K hat in $P(a\,|\,b)$ die Steigung -2	
K berührt an der Stelle 2 die Gerade g: $y = x$ * !	
K hat in $C(3\,|\,5)$ eine Tangente parallel zu g:... $y = 2x - 1$	
K hat in $C(3\,|\,5)$ eine Tangente senkrecht zu g: $y = 2x - 1$	
K berührt an der Stelle a den Graphen von g.	
K schneidet den Graphen von g bei a senkrecht.	
K hat den Tiefpunkt $T(-1\,|\,4)$	
K hat den Hochpunkt $H(3\,|\,-1)$	
K hat den Wendepunkt $W(-2\,|\,3)$	
K hat den Terrassenpunkt $Q(3\,|\,-3)$	
K berührt die x-Achse bei x = 5	
K hat bei x = 3 die Wendetangente $y = -x + 1$	
K schneidet die x-Achse bei x = 4 unter dem Winkel 30°	
K berührt die erste Winkelhalbierende bei x = 2,5	
$A(5\,|\,3)$ liegt auf K und K ist symmetrisch zur Geraden x = 2	
K ist punktsymmetrisch zu $Z(1\,|\,2)$ und $A(3\,|\,1)$ liegt auf K (Dann ist Z Mittelpunkt von A und A').	

Liste der Steckbrief-Folgerungen	
Aus dieser Kurveneigenschaft	**folgt diese Funktionseigenschaft**
Die Kurve K geht durch den Punkt $P(-1\|2)$.	$f(-1)=2$
K schneidet die x-Achse an der Stelle 7.	7 ist Nullstelle der Funktion: $f(7)=0$
K hat an der Stelle 2 die Steigung 3.	$f'(2)=3$
K hat in $P(a\|b)$ die Steigung -2.	1. $f(a)=b$ und 2. $f'(a)=-2$
K berührt an der Stelle 2 die Gerade g: $y=x+1$	1. Der Berührpunkt hat dann die y-Koordinate 3 also $f(2)=3$ und 2. $f'(2)=1=m_g$
K hat in $C(3\|5)$ eine Tangente parallel zu g:... $y=2x-1$	1. $f(3)=5$ und 2. $f'(3)=m_g=2$
K hat in $C(3\|5)$ eine Tangente senkrecht zu g: $y=2x-1$	1. $f(3)=5$ und 2. $f'(3)=-\frac{1}{m_g}=-\frac{1}{2}$
K berührt an der Stelle a den Graphen von g.	1. $f(a)=g(a)$ und 2. $f'(a)=g'(a)$
K schneide den Graphen von g bei a senkrecht.	1. $f(a)=g(a)$ und 2. $f'(a)=-\frac{1}{g'(a)}$
K hat den Tiefpunkt $T(-1\|4)$	1. $f(-1)=4$ und 2. $f'(-1)=0$
K hat den Hochpunkt $H(3\|-1)$	1. $f(3)=-1$ und 2. $f'(3)=0$
K hat den Wendepunkt $W(-2\|3)$	1. $f(-2)=3$ und 2. $f''(-2)=0$
K hat den Terrassenpunkt $T(3\|-3)$	1. $f(3)=-3$, 2. $f'(3)=0$ und 3. $f''(3)=0$
K berührt die x-Achse bei x = 5	1. $f(5)=0$ und 2. $f'(5)=0$
K hat bei x = 3 die Wendetangente $y=-x+1$	1. Der Wendepunkt ist $W(3\|-2)$ d. h. $f(3)=-2$ 2. $f'(3)=-1$ und $f''(3)=0$
K schneidet die x-Achse bei x = 4 unter dem Winkel 30^o	1. $f(4)=0$ und 2. $f'(4)=\tan 30^o$ $\left(=\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)$
K berührt die erste Winkelhalbierende bei x = 2,5	1. $f(2{,}5)=2{,}5$ und 2. $f'(2{,}5)=1$
$A(5\|3)$ liegt auf K und K ist symmetrisch zur Geraden x = 2	Dann gilt $f(2-h)=f(2+h)$. Also liegt auch $A'(-1\|3)$ auf K: $f(-1)=3$
K ist punktsymmetrisch zu $Z(1\|2)$ und $A(3\|1)$ liegt auf K (Dann ist Z Mittelpunkt von A und A').	Spiegelt man A an Z, erhält man $A'(-1\|3)$ als Spiegelbild auf K: $f(-1)=3$